Chapitre 27 : Espaces préhilbertiens réels

Table des matières

1 Définition et exemples

Définition 1.1 (produit scalaire)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Un produit scalaire sur E est une **forme** $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. φ est **bilinéaire**, c'est-à-dire :
   (i) $\forall x\,,x'\,,y \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x+\lambda x'\,,y) = \varphi(x\,,y) + \lambda\varphi(x'\,,y)$ (linéarité à gauche)
   (ii) $\forall x\,,y\,,y' \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\varphi(x\,,y+\lambda y') = \varphi(x\,,y) + \lambda\varphi(x\,,y')$ (linéarité à droite)
2. φ est **symétrique** : $\forall x\,,y \in E$, $\varphi(x\,,y) = \varphi(y\,,x)$
3. φ est **définie-positive** : $\forall x \in E$:
   (i) $\varphi(x\,,x) \geqslant 0$ (φ est positive)
   (ii) $\varphi(x\,,x) = 0 \implies x = 0_E$ (φ est définie)

De manière plus condensée : un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie-positive.

Notation : Lorsque φ est un produit scalaire, on note en général $(x|y)$, $\langle x,y\rangle$ ou $x \cdot y$ au lieu de $\varphi(x\,,y)$.

Remarques :

1. Si on a déjà montré la linéarité à gauche et la symétrie, alors on aura automatiquement la linéarité à droite, et donc la bilinéarité.
   Ceci permet de raccourcir les preuves où l'on montre qu'une application est un produit scalaire.
2. L'implication $x = 0_E \implies (x|x) = 0$ est vraie également (par linéarité à gauche ou à droite).
   On a donc l'équivalence : $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$.
   En particulier, on a pour tout $x \in E\backslash\{0_E\}$: $(x|x) > 0$.

Exemples à connaître :

1. Sur $\mathbb{R}^n$, le **produit scalaire canonique** est défini par :
$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad \text{où } x = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } y = (y_1, \ldots, y_n)$$
2. Sur l'espace vectoriel $\mathscr{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ (avec $a < b$), on a le produit scalaire défini par :
$$(f|g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
   Remarque : Ceci définit aussi un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est défini par :
$$(A|B) = \operatorname{tr}(A^T B) = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j}b_{i,j} \qquad \text{où } A = (a_{i,j}) \text{ et } B = (b_{i,j})$$
   On rappelle que la trace, notée tr*, est la forme linéaire sur l'espace des matrices carrées dont l'image d'une matrice est la somme de ses coefficients diagonaux.*

Définition 1.2 (espace préhilbertien réel, euclidien)

Un espace préhilbertien réel est la donnée :

1. d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E ;
2. d'un produit scalaire sur E.

Si de plus l'espace vectoriel E est de dimension finie, on dit qu'il s'agit d'un espace euclidien.

Dans la suite, le produit scalaire dans un espace préhilbertien réel sera toujours noté $(.|.)$.

2 Norme et distance

2.1 Norme euclidienne

Définition 2.1 (norme euclidienne)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit $x \in E$.
La norme euclidienne de x est définie par :

$$\|x\| = \sqrt{(x|x)}$$

Proposition 2.2 (propriétés de la norme)

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. *positivité* : $\forall x \in E,\ \|x\| \geqslant 0$
2. *absolue-homogénéité* : $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$
3. *séparation* : $\forall x \in E,\ \|x\| = 0 \implies x = 0_E$

Cas particulier : $\forall x \in E, \|-x\| = \|x\|$.

Proposition 2.3 (identité remarquable)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y \in E$.

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y)$$

Corollaire 2.4 (formule de polarisation)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y \in E$.

$$(x|y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

Remarque : Cette formule permet de retrouver le produit scalaire connaissant la norme.

2.2 Distance euclidienne

Définition 2.5 (distance)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y \in E$.
La distance entre x et y est définie par :

$$d(x\,,y) = \|y-x\|$$

Remarque : La norme de x est la distance de x à 0_E.

Proposition 2.6 (propriétés de la distance)

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. *positivité* : $\forall x\,,y \in E,\ d(x\,,y) \geqslant 0$
2. *symétrie* : $\forall x\,,y \in E,\ d(x\,,y) = d(y\,,x)$
3. *séparation* : $\forall x\,,y \in E,\ d(x\,,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

2.3 Inégalités

Théorème 2.7 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y \in E$.

1. $|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$
2. *Cas d'égalité* : $|(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$ si et seulement si x et y sont colinéaires.

Exemples 2.8 :

1. Pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \times \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$
avec égalité si et seulement si les vecteurs $(x_1,\ldots,x_n)$ et $(y_1,\ldots,y_n)$ sont colinéaires.
2. Pour le produit scalaire usuel sur $\mathscr{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit :
$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \int_a^b f(t)^2\,\mathrm{d}t \times \int_a^b g(t)^2\,\mathrm{d}t$$
avec égalité si et seulement si les fonctions f et g sont proportionnelles.

Théorème 2.9 (inégalité triangulaire)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y \in E$.

1. $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$
2. *cas d'égalité* : $\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^+,\ x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ (on dit que x et y sont **positivement liés**)

Corollaire 2.10 (inégalité triangulaire pour la distance)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x, y et $z \in E$.

1. $d(x\,,z) \leqslant d(x\,,y) + d(y\,,z)$
2. *cas d'égalité* : $d(x\,,z) = d(x\,,y) + d(y\,,z) \Leftrightarrow y \in [x\,;z] \underset{\text{def}}{=} \{tx + (1-t)z \ / \ t \in [0\,;1]\}$.

Proposition 2.11 (inégalité triangulaire inversée)

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. $\forall x\,,y \in E$, $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x-y\|$
2. $\forall x\,,y\,,z \in E$, $\big|d(x\,,y) - d(x\,,z)\big| \leqslant d(y\,,z)$.

2.4 Norme et distance dans le cadre général

Définition 2.12 (norme)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Une norme sur E est une application de $\mathcal{N} : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. séparation : $\forall x \in E$, $\mathcal{N}(x) = 0 \implies x = 0_E$
2. absolue-homogénéité : $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda|\,\mathcal{N}(x)$
3. sous-additivité : $\forall x,y \in E$, $\mathcal{N}(x+y) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$

Remarques :

1. La réciproque de l'axiome de séparation est vraie.
En effet, $\mathcal{N}(0_E) = \mathcal{N}(0.0_E) = 0 \times \mathcal{N}(0_E) = 0$.
2. Une norme est toujours positive.
En effet, pour tout $x \in E$, $0 = \mathcal{N}(0_E) = \mathcal{N}(x-x) \leqslant \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 2\mathcal{N}(x)$.
3. La norme euclidienne est une norme mais la réciproque est fausse en général. Contre exemple : la norme $\mathcal{N}$ sur $\mathbb{R}^2$ définie par $\mathcal{N}((x,y)) = \max(|x|,|y|)$ ne découle pas d'un produit scalaire car elle ne vérifie pas l'identité du parallélogramme (c.f. TD pour cette dernière).

Notation : Lorsque $\mathcal{N}$ est une norme, on note en général $\|x\|$ au lieu de $\mathcal{N}(x)$.

Définition 2.13 (distance)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Une distance sur E est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+$ qui vérifie les propriétés suivantes :

1. symétrie : $\forall x,y \in E$, $d(x,y) = d(y,x)$
2. séparation : $\forall x \in E$, $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. inégalité triangulaire : $\forall x,y,z \in E$, $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$

Remarques :

1. La distance euclidienne est une distance.
2. On peut construire une distance à partir d'une norme en posant $d(x,y) = \mathcal{N}(x-y)$ mais toute distance ne découle pas d'une norme. Exemple : la distance d sur $\mathbb{R}$ définie par $d(x,y) = 1$ si $x \neq y$ et 0 sinon, ne découle pas d'une norme (en effet, pour x et y distincts, on aurait $1 = d(2x,2y) = 2d(x,y) = 2$).

3 Orthogonalité

3.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 3.1 (vecteurs orthogonaux)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y \in E$.
On dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux si $(x|y) = 0$.

Remarque : Le vecteur 0_E est orthogonal à tous les vecteurs de E.

Exemple 3.2 : Soit $\mathscr{C}([0;2\pi],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
Montrer que les fonctions cos et sin sont orthogonales.

Théorème 3.3 (théorème de Pythagore)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soient x et $y \in E$.
x et y sont orthogonaux si et seulement si $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

3.2 Orthogonal d'une partie

Définition 3.4 (orthogonal d'une partie)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit A une partie de E.
L'orthogonal de A est la partie de E, notée $A^\perp$, définie par :

$$A^\perp = \{x \in E \ / \ \forall a \in A,\ (x|a) = 0\}$$

Autrement dit, $A^\perp$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Exemple 3.5 : Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Soit $A = \{(0,1,0),(0,0,1)\}$. Déterminer $A^\perp$.

Proposition 3.6 (premières propriétés de l'orthogonal d'une partie)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit A et B deux parties de E.

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. $\{0_E\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0_E\}$.
3. Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Remarque : Attention, la dernière inclusion peut-être stricte (considérer $(A^\perp)^\perp$ dans l'exemple précédent).

Proposition 3.7 (orthogonal d'un sous-espace vectoriel de dimension finie)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
On note $(e_1, \dots, e_p)$ une famille génératrice de F.
On a alors l'égalité : $F^\perp = \{e_1; \dots; e_p\}^\perp$ i.e. $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp = \{e_1; \dots; e_p\}^\perp$.

Autrement dit, pour tout $x \in E$, on a l'équivalence :

$$x \in F^{\perp} \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in [\![1\,;p]\!],\ (x|e_i) = 0.$$

Ainsi la détermination de $F^{\perp}$ se ramène à la résolution d'un système fini d'équations.

Remarque : Plus généralement, on peut montrer que pour toute partie $A \subset E$, $\mathrm{Vect}(A)^{\perp} = A^{\perp}$.

Exemple 3.8 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$.
Déterminer l'orthogonal de $\mathbb{R}_1[X]$.

3.3 Familles orthogonales et orthonormales

Définition 3.9 (famille orthogonale, orthonormale)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E.

1. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est <u>orthogonale</u> si les vecteurs de la famille sont deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire :
$$\forall i\,,j \in I,\ i \neq j \implies (u_i|u_j) = 0$$
2. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est <u>orthonormale</u> ou <u>orthonormée</u> si elle est orthogonale et que tout vecteur de la famille est de norme 1, c'est-à-dire :
$$\forall i\,,j \in I,\ (u_i|u_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Exemples 3.10 :

1. La base canonique $(e_1\,,\dots,e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est orthonormale pour le produit scalaire canonique.
2. La base canonique $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (formée par les matrices élémentaires) est orthonormale pour le produit scalaire défini par $(A|B) = \mathrm{tr}(A^T B)$.

Remarques :

1. Dans une famille orthonormale, tous les vecteurs sont non nuls, car de norme 1.
2. Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille orthogonale de vecteurs non nuls, alors la famille $(e'_i)_{i\in I}$ définie par $e'_i = \dfrac{e_i}{\|e_i\|}$ est orthonormale.

Proposition 3.11 (théorème de Pythagore généralisé)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit $(u_1\,,\dots,u_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
Si cette famille est orthogonale, alors on a l'égalité :

$$\left\|\sum_{i=1}^{p} u_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2$$

Remarque : Contrairement au théorème de Pythagore classique, la réciproque est fausse.
En effet, pour les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ suivants $u = (1{,}0)$, $v = (0{,}1)$ et $w = (2,-2)$, on a

$$\|u+v+w\|^2 = 10 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \|w\|^2$$

mais (u,v,w) n'est pas une famille orthogonale.

Théorème 3.12 (liberté d'une famille orthogonale de vecteurs non nuls)

Soit E un espace préhilbertien réel et soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **orthogonale** de vecteurs **non nuls** de E.
Alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est libre.

3.4 Bases orthonormales en dimension finie

Une base orthonormale est une famille qui est une base et qui est orthonormale.

Remarque : Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}$.
Alors toute famille orthonormale de E qui possède n éléments est une base orthonormale de E.
En effet, une telle famille est libre et possède $n = \dim(E)$ éléments, c'est donc une base de E.

Exemples 3.13 :

1. La base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.
2. La base canonique $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ (formée par les matrices élémentaires) est une base orthonormale de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire défini par $(A|B) = \mathrm{tr}(A^T B)$.

Théorème 3.14 (existence de bases orthonormales dans un espace euclidien)

Soit E un espace euclidien.
Il existe une base orthonormale de E.

Démonstration. Comme E est de dimension finie, on peut considérer une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E.
On applique ensuite le **procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt** sur cette base.
On construit successivement des vecteurs $e''_1, e'_1, \dots, e''_n, e'_n$ de E en posant à chaque étape

$$e''_k = e_k + \lambda_1 e'_1 + \cdots + \lambda_{k-1} e'_{k-1} \text{ et } e'_k = \frac{e''_k}{\|e''_k\|}$$

de telle sorte $(e''_k|e'_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,;k-1]\!]$ (ce qui permet de déterminer de manière unique les scalaires λ_i).
La famille $(e'_1, \dots, e'_n)$ est alors une base orthonormale de E. De plus, elle vérifie la propriété particulière suivante :

$$\forall k \in [\![1;n]\!], \quad \mathrm{Vect}(e'_1, \dots, e'_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$$

□

Remarque : Les premiers vecteurs du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt ont pour expression :

$$e'_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} \quad ; \quad e'_2 = \frac{e_2 - (e_2|e'_1)e'_1}{\|e_2 - (e_2|e'_1)e'_1\|} \quad ; \quad e'_3 = \frac{e_3 - (e_3|e'_1)e'_1 - (e_3|e'_2)e'_2}{\|e_3 - (e_3|e'_1)e'_1 - (e_3|e'_2)e'_2\|}$$

Exemple 3.15 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Déterminer une famille (P_0,P_1,P_2) telle que celle-ci soit une base orthonormale de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 3.16 (théorème de la base orthonormale incomplète)

Soit E un espace euclidien, et soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormale de E.
On peut compléter cette famille en une base orthonormale de E.

Démonstration. On commence par compléter la famille libre $(e_1, \dots, e_k)$ en une base quelconque de E, puis on applique le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à cette base.
La base orthonormale obtenue aura alors pour premiers vecteurs $e_1, \dots, e_k$. □

3.5 Expressions dans une base orthonormale

Théorème 3.17 (coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale)

Soit E un espace euclidien, soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, et soit $x \in E$.
Les coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$ sont $((x|e_1), \dots, (x|e_n))$.
Autrement dit, on a l'égalité suivante : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i$.

Corollaire 3.18 (expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale)

Soit E un espace euclidien, soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E, et soient x et y des vecteurs de E, de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans la base $\mathscr{B}$.

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\,(y|e_i) \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2}$$

Exemple 3.19 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Déterminer les coordonnées de X^2 dans la base (P_0, P_1, P_2) puis déterminer $\|X^2\|$.

4 Projection orthogonale

4.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie

Théorème 4.1 (un sous-espace de dimension finie est supplémentaire avec son orthogonal)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
On suppose que ***F* est de dimension finie**.
Alors les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont supplémentaires i.e. $F \oplus F^\perp = E$
On dit alors que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.

Corollaire 4.2 (dimension de l'orthogonal et orthogonal de l'orthogonal dans un espace euclidien)

Soit E un espace **euclidien**, et soit F un sous-espace vectoriel de E.
Alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Exemple 4.3 : Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel. Déterminer le supplémentaire orthogonal de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Remarque : En dimension quelconque, on a $F \subset (F^\perp)^\perp$, mais attention, l'inclusion peut être stricte (c.f. TD).

4.2 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Définition 4.4 (projection orthogonale)

Soit E un espace préhilbertien réel, et soit F un sous-espace vectoriel **de dimension finie** de E.
La projection orthogonale sur F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.
La projection orthogonale sur F est donc l'unique endomorphisme p de E caractérisé par :

$$\forall x \in F,\ p(x) = x \text{ et } \forall x \in F^\perp,\ p(x) = 0_E\,.$$

Proposition 4.5 (Inégalité de Bessel)

Soit E un espace préhilbertien réel, soit $x \in E$ et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On note p la projection orthogonale sur F.

$$\forall x \in E, \quad \|p(x)\| \leqslant \|x\|$$

Méthodes afin de déterminer l'expression d'une projection orthogonale :
Soit E un espace préhilbertien réel, et soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E.
Soit p la projection orthogonale sur F et soit $x \in E$. Le but est de trouver une expression de $p(x)$.

Méthode 1 (par analyse-synthèse) :
On décompose x sous la forme $x = x_F + x_{F^\perp}$ avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$: on a alors $p(x) = x_F$.

Exemple 4.6 : Soit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire usuel.
Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 2 (par résolution d'un système linéaire si on connaît une base de F) :
Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, notons $\lambda_1, \cdots, \lambda_p$ les coordonnées de $p(x)$ dans cette base.
Le vecteur $x - p(x) \in F^\perp$ d'où, pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, $(x - \lambda_1 e_1 - \cdots - \lambda_p e_p | e_i) = 0$. Il reste ensuite à résoudre ces p équations d'inconnues $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ afin de déterminer x.

Exemple 4.7 : Soit $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x + y + z = 0\right\}$.
Déterminer une expression explicite de la projection orthogonale sur F.

Méthode 3 (directe si on connaît une base orthonormale de F) :
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormale de F, alors $p(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x|e_i)\, e_i$.

Remarque : L'orthonormalisation de Gram-Schmidt se montre utile ici car elle permet de fournir une base orthonormale de F.

Exemple 4.8 : Soit E un espace préhilbertien réel. Soit D une droite vectorielle de vecteur directeur a.
Déterminer l'expression de la projection orthogonal p sur D en fonction de a.

4.3 Distance à un sous-espace

Définition 4.9 (distance d'un point à une partie)

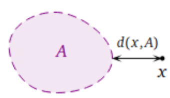
Soit E un espace préhilbertien réel, soit $x \in E$ et soit A une partie non vide de E.
On appelle <u>distance de x à A</u>, notée $d(x, A)$, le réel positif défini par :

$$d(x, A) = \inf \left\{ d(x, y) \ / \ y \in A \right\} = \inf_{y \in A} \|x - y\|$$

Remarques :

1. Cette borne inférieure est bien définie, car l'ensemble $\{d(x, y) \ / \ y \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par 0.

2. Cette borne inférieure n'est dans certains cas pas atteinte, c'est pourquoi on ne peut parler de minimum.

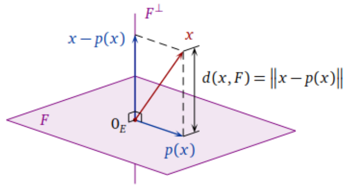


Théorème 4.10 (distance d'un point à un sous-espace de dimension finie)

Soient E un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. et $x \in E$. On note p la projection orthogonale sur F. La borne inférieure $d(x\,,F)$ est en fait un minimum, et ce minimum est atteint en un unique point de F, qui est égal à $p(x)$.
On a donc $d(x\,,F) = \|x - p(x)\|$.

Exemple 4.11 : Soit $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Déterminer la distance du polynôme X^2 au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$.

Remarque : Dans un espace euclidien, afin de calculer une distance, il est parfois plus intéressant de calculer le projeté sur $F^\perp$ que celui sur F, notamment lorsque $\dim(F^\perp) < \dim(F)$.



5 Vecteur normal à un hyperplan dans un espace euclidien

Définition 5.1 (vecteur normal à un hyperplan d'un espace euclidien)

Soit E un espace euclidien, et soit H un hyperplan de E.
On appelle vecteur normal à H tout vecteur non nul de $H^\perp$.

Remarque : Comme H est un hyperplan, alors son supplémentaire orthogonal $H^\perp$ est une droite vectorielle. Par conséquent, tous les vecteurs normaux à H sont colinéaires deux à deux.

Exemple 5.2 : Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, on considère un plan P d'équation $ax+by+cz=0$, avec a, b, c réels et $(a\,,b\,,c) \neq (0\,,0\,,0)$. Un vecteur normal au plan P est $v = (a,b,c)$.

Proposition 5.3 (détermination d'un hyperplan par un vecteur normal)

Soient E un espace euclidien, v un vecteur non nul de E.
Il existe un unique hyperplan H ayant v pour vecteur normal. De plus, $H = \{v\}^\perp$.

Exemple 5.4 : Soit $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2)$.
Déterminer l'hyperplan ayant pour vecteur normal X.

Théorème 5.5 (distance d'un point à un hyperplan dans un espace euclidien)

Soit E un espace euclidien, soit $x \in E$ et soit H un hyperplan de vecteur normal v.
Alors $d(x\,,H) = \dfrac{|(x|v)|}{\|v\|}$.

Exemple 5.6 : Déterminer la distance euclidienne de $(1{,}1{,}1)$ à $H = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ -x+y+z=0\right\}$.